

# Le cœur ♥ me ♠

Vincent Lesbros  
13-14 mai 2023

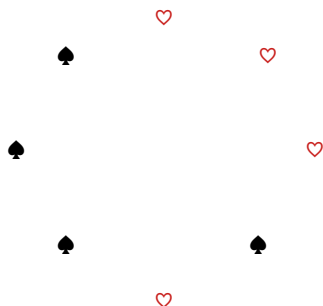
Je crois qu'il faut commencer par un peu de magie avant la science.

Le magicien étale ses cartes : as de cœur ♥ et un as de pique ♠.

D'un souffle il en fait 4 de chaque.

♥♥♥♥♠♠♠♠

D'une passe, il transforme les cartes en perles, les enfle pour faire un collier qu'il dispose en ce cercle magique :



«Ce collier condense en lui-même les huit combinaisons possibles de trois perles prises parmi les perles en cœurs et les perles en pique. Dit-il.»

♥♥♥

♥♥♠

♥♠♥

♠♥♠

♥♠♠

♠♠♠

♠♠♥

♠♥♥

Le silence règne, le temps de vérifier. Oui, en tournant dans le sens des aiguilles de la montre de grand-père... Ça marche. Il y a toutes les combinaisons, et pas deux fois la même.

Comme vous êtes son apprenti, il vous explique comment il a procédé :

- «D'abord, je regarde tous les types de perles dont je dispose. Il ne peut pas y en avoir deux pareils, sinon se serait le même type!

Mettons que j'ai des perles en ♥ et des perles en ♠. Et je les ordonne ♥♠.

Pour généraliser, disons que j'ai  $x$  types de perles. Ici, en particulier,  $x = 2$ .

Ensuite je choisis un nombre entier positif  $n$ . Le collier final présentera toutes les combinaisons de  $n$  perles prises parmi les  $x$  types possibles.

Dans mon exemple précédent, on avait  $n = 3$ , prenons maintenant  $n = 4$  et non pas  $n = 50$ .

- Pourquoi pas 50?

- Parce que le collier final doit être fait de  $x^n$  perles et contenir les  $x^n$  combinaisons possibles une et une seule fois.

Pour  $n = 50$ , cela ferait un collier de 1125 899 906 842 624 perles. Hum.

Prenons  $n = 4$ . Cela devra faire un collier de 16 perles.

Je commence par construire une collection de colliers avec mes perles.

Des colliers déjà très particuliers.

L'ordre de cette collection est important.

J'ai un truc pour passer d'un collier au collier suivant, que je vous dévoile maintenant :

**Recopier** - j'enfile des perles de la couleur de celles du collier précédent jusqu'à avoir  $n$  perles.

**Retirer** - tant que la dernière perle de ce nouveau collier est de la dernière couleur possible, je l'enlève.

**Remplacer** - puis je remplace la dernière perle par une perle de la couleur suivante.

Pour commencer ma collection, je fabrique un collier avec juste la première perle.

Et j'applique mon truc pour faire la collection, jusqu'à ce que j'arrive à un collier... sans perle!

Haut les cœurs! Le magicien, le bateleur, doit être agile, habile et ne pas se tromper dans ses manipulations. Allons-y en partant du cœur ♥. Pourquoi le ♥? Parce que c'est la première couleur dans notre liste de types ♥♠. On place ce ♥ initial dans la première case de la première colonne d'un tableau vide, à 4 colonnes:

Collection	Recopier	Retirer	Remplacer
♥			
...			

Le tableau ci-dessous donne étape par étape les résultats des manipulations faites. La première colonne donne notre **Collection** de colliers. Les trois colonnes suivantes correspondent aux trois phases du truc pour les fabriquer.

Dans la phase **Recopier**, on enfile exactement  $n$  perles en prenant la couleur de celle qu'on égrène sur le chapelet de la colonne **Collection** de la même ligne.

Dans la phase **Retirer** on enlève la dernière perle tant que sa couleur est le ♠. Pourquoi le pique? Parce que c'est la dernière couleur dans notre liste ♥♠.

Dans la phase **Remplacer**, on remplace la perle finale par une perle de sa couleur suivante. Dans notre cas, la couleur suivante du ♥ est le ♠. Remarquez qu'on ne doit jamais chercher la couleur suivante du pique, puisqu'on l'a retiré avant.

Collection	Recopier	Retirer	Remplacer
♥	♥♥♥♥	♥♥♥♥	♥♥♥♠
♥♥♥♠	♥♥♥♠	♥♥♥	♥♥♠
♥♥♠	♥♥♠♥	♥♥♠♥	♥♥♠♠
♥♥♠♠	♥♥♠♠	♥♥	♥♠
♥♠	♥♠♥♠	♥♠♥	♥♠♠
♥♠♠	♥♠♠♥	♥♠♠♥	♥♠♠♠
♥♠♠♠	♥♠♠♠	♥	♠
♠	♠♠♠♠		

Belle collection de huit colliers. Bien particuliers. Mais on ne les garde pas tous.

On ne va garder que les colliers dont le nombre de perles **divise**  $n$ .

1 divise 4, 4 divise 4, 2 divise 4, mais pas 3. J'élimine donc les colliers ♥♥♠ et ♥♠♠.

Je ne garde, dans l'ordre, que:

♥, ♥♥♥♠, ♥♥♠♠, ♥♠, ♥♠♠♠, ♠

Et voilà, il ne me reste plus qu'à enfile le tout sur un même collier de 16 perles!

♥♥♥♥♠♥♥♠♠♥♠♥♠♠♠♠

On va vérifier qu'il y a bien toutes les combinaisons de 4 perles de cœur ou de pique.

Pour cela, je dis que ♥ vaut 0, et que ♠ vaut 1. En prenant les perles 4 par 4, je converti le quartet en nombre décimal et je l'écris en dessous de la position correspondante:

♥	♥	♥	♥	♠	♥	♥	♠	♠	♥	♠	♥	♠	♠	♠	♠
0	1	2	4	9	3	6	13	10	5	11	7	15	14	12	8
0000	0001	0010	0100	1001	0011	0110	1101	1010	0101	1011	0111	1111	1110	1100	1000

J'ai ajouté la notation en base 2 en dessous, pour mieux voir.

Oui, c'est un collier, donc quand on arrive au bout à droite, on reprend au début à gauche.

Vous avez vérifié? Il y a bien les 16 valeurs possibles, une et une seule fois?»

## Références :

Pour vérifier ou créer des mots de Bruijn et des mots de Lyndon :  
<https://www.cyclonium.com/atelier/mots/MotsDeLyndon.html>

Ensemble : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble>

Suite : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite\\_\(math%C3%A9matiques\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_(math%C3%A9matiques))

Relation d'ordre : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Relation\\_d%27ordre](https://fr.wikipedia.org/wiki/Relation_d%27ordre)

Mot : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Mot\\_\(math%C3%A9matiques\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Mot_(math%C3%A9matiques))

Étoile de Kleene : [https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89toile\\_de\\_Kleene](https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89toile_de_Kleene)

Concaténation : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Concat%C3%A9nation>

Entier naturel : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Entier\\_naturel](https://fr.wikipedia.org/wiki/Entier_naturel)

Monoïde : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Mono%C3%AFde>

Mot de Lyndon : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Mot\\_de\\_Lyndon](https://fr.wikipedia.org/wiki/Mot_de_Lyndon)

Mot ou Suite de de Bruijn : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite\\_de\\_de\\_Bruijn](https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_de_Bruijn)

Relation d'équivalence : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Relation\\_d%27%C3%A9quivalence](https://fr.wikipedia.org/wiki/Relation_d%27%C3%A9quivalence)

Collier : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Collier\\_\(combinatoire\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Collier_(combinatoire))

Code de Gray : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Code\\_de\\_Gray](https://fr.wikipedia.org/wiki/Code_de_Gray)